# ARC057 解説

DEGwer

2016 年 7 月 9 日

## A 問題

問題概要: 高橋君は最初 $A$ 円を持っている。一日経つごとに所持金が $K*$(現在の所持金) $+ 1$ 円だけ増える。所持金が最初に 2 兆円以上になるのは何日後か。

解説:

まず、$K = 0$ のとき、所持金は毎日 1 円ずつ増えるので、求める日数は $2 \times 10^{12} - A$ 日です。

そうでない場合、日数を一日ずつすすめて問題文に書かれている通りにシミュレーションすることを考えます。このとき、1 日後の高橋君の所持金は 1 円以上であり、かつそれ以降高橋君の所持金は毎日 $K + 1$ 倍以上、特に 2 倍以上になるので、求める日数は高々$\log_2 10^{12} + 1$ 日となり、愚直にループを回しても間に合います。($K = 0$ の場合は、所持金が指数的に増えないので愚直なループでは間に合わず、この場合のみ場合分けをしてやる必要があります。)

## B 問題

問題概要: $N$ 日間にわたって、$i$ 日目には $a_i$ 回のゲームをする。合計の勝利回数 $K$ が与えられるので、前日までより勝率が上がった回数の最大値を求めよ。ただし、0 日目の勝率は 0 とする。

解説:

まず、$a_1 + a_2 + ... + a_N = K$ のときは、すべての日のすべてのゲームに勝つことになります。この場合、1 日目以降の勝率はすべて 1 であり、勝率が上がった回数は 1 です。この場合は特別に処理することにして、以下そうでない場合のみ考えます。

そうでない場合、勝利回数を $K$ 回ちょうどでなく、$K$ 回以下と言い換えても答えが変わらないことを証明します。

$L(< K < a_1 + ... + a_N)$ 回の勝利回数で $t$ 回、前日までより勝率が上がったとします。このとき、勝利回数の列を後ろから順に見て、勝利回数が $K$ 回に達するまで、その日のゲームの回数より勝利回数が真に少ない日の勝利回数を増やす操作を考えます。

この操作で勝利回数が増えた (前から見て) 最初の日を $x$ 日目とします。$x+1$ 日目以降はすべてのゲームに勝っており、$x-1$ 日目までに (場合分けの条件より) 少なくとも 1 敗はしていることから、$x+1$ 日目以降のすべての日で勝率が上がっています。また、$x$ 日目にはこの操作のせいで勝率が下がるようになることはなく、$x-1$ 日目以前の勝率の上下は、この操作では変わりません。よって、$L$ 回の勝利で $t$ 回勝率が上昇する状況が存在するなら、$K$ 回の勝利で $t$ 回以上勝率が上昇する状況も存在することが示されました。

ここで、以下のような DP を考えます。$DP[i][j]$ を $i$ 日目までに $j$ 回勝率が上昇した場合の勝利数の最小値とします。この DP の遷移は、$i$ 日目の勝利回数として 0 から $a_i$ までの $a_i+1$ 通りが考えられますが、勝利数を最小化したいので、この中の 0 勝の場合と、勝率が上昇するぎりぎりの勝ち数の場合だけ遷移をすればいいことが分かります。

この DP を計算していき、$DP[N][i]$ が $K$ 以下となる最大の $i$ が求める答えとなります。

これで時間計算量は $O(N^2)$ となり、正答を得ることができます。実装によっては $a_1=1$ の場合がコーナーケースとなるので、気を付けましょう。

# C 問題

問題概要: $\sqrt{N}$ の上 $k$ 桁が $a_1a_2...a_k$ となるような最小の $N$ を求めよ。

解説:

10 進法での整数 $a_1a_2...a_k$ を $A$ と書くことにします。

$\sqrt{N}$ の上 $k$ 桁が $a_1a_2...a_k$ $\Leftrightarrow$ ある正とは限らない整数 $t$ が存在し、$A\times10^t \le \sqrt{N} < (A+1)\times10^t$ $\Leftrightarrow$ ある正とは限らない整数 $t$ が存在し、$A^2\times10^{2t} \le N < (A+1)^2\times10^{2t}$

です。この条件を満たす $N$ は、$t$ が大きいほど桁数が大きくなるので、$t$ を小さいほうから順に試し、$A^2\times10^{2t} \le N < (A+1)^2\times10^{2t}$ を満たす $N$ が見つかったらそれを出力して終了するアルゴリズムで、正解を得ることができます。

実装では、多倍長整数 $A$ と $A+1$ の 2 乗をそれぞれ求め、適切に先頭に 0 を付け加えて偶数桁にしておき、さらに末尾に偶数個の 0 を付け加えたものを用意し、$N$ の桁数 $d$ を 2 桁ずつ増やしていって、$A$ の 10 進表記の先頭 $d$ 個の数字を並べてできる整数と、それに 1 を足したものを答えの候補とし、これらが条件を満たすかどうか調べます。はじめて見つかった条件を満たすものが、求める $N$ となります。

増やす桁数が 2 桁ずつであることに気を付けてください。例えば、$\sqrt{1}$ の上のほうの位は 100... ですが、$\sqrt{10}$ の上のほうの位は 316... になります。

# D 問題

問題概要: $N$ 頂点で、各辺の重みが $1, 2, ..., N(N-1)/2$ の並び替えである完全無向グラフであって、最小全域木に使われる辺のコストが小さいほうから

順に $A_1, A_2, ..., A_{N-1}$ であるようなものの個数を求めよ。頂点同士は互いに区別する。

解説:

最小全域木は、クラスカル法で求めることができます。条件を満たすグラフにクラスカル法を適用して最小全域木を求めることを考えると、コストが小さいほうから順に辺を追加していったとき、連結成分同士がつながる $N-1$ 回のタイミングが、順に $A_1, A_2, ..., A_{N-1}$ であるということになります。

いま、条件を満たすグラフを、辺をコストが小さい順に追加していくことでつくることを考えます。$A_1, A_2, ..., A_{N-1}$ 回目の操作では、異なる連結成分の頂点同士をつなぎ、そうでない場合は同じ連結成分の頂点同士をつなぐように辺をはると、このとき、そしてこのときのみ、できるグラフは条件を満たします。

いま、連結成分同士をつなぐ操作を $k$ 回やったとします。このとき、$N-k+1$ 個の連結成分がありますが、この連結成分のサイズたちの集合が同じなら、次以降に辺を張れる頂点対の個数は同じになることが分かります。よって、連結成分のサイズの集合をキーにした DP を考えることができます。

この DP の計算量を評価します。連結成分サイズたちの集合は、$N$ をいくつかの整数の和で書く方法の場合の数と同じです。これは分割数と呼ばれる値で、$N = 30$ では 5604 となります。遷移は、異なる連結成分同士を結ぶときのみ $O(N^3 logN)$ の計算量でできるように実装できます。(結ぶ連結成分の組をすべてためします。)

以上で、$O((N \text{ の分割数}) \times N^3 \log N)$ でこの問題を解くことができます。